

MONOPÔLES MAGNÉTIQUES EN THÉORIE DES CHAMPS

CAMILLE ELOY

Cet article expose plusieurs types de monopôles magnétiques. Les motivations conduisant à la prédiction de tels objets et le monopôle de Dirac sont tout d'abord présentés. Puis, dans le but d'exposer la théorie de 't Hooft-Polyakov, nous introduisons les théories de jauge et le mécanisme de brisure spontanée de symétrie. Enfin les monopôles de 't Hooft-Polyakov et BPS sont présentés.

1. INTRODUCTION

Un monopôle magnétique est une particule ponctuelle portant une charge magnétique. L'existence de tels objets est *a priori* interdite par la théorie de l'électromagnétisme. Les équations de Maxwell imposent en effet une divergence nulle au champ magnétique, les seuls objets magnétiques autorisés sont alors les courants, dûs aux mouvements des charges électriques. Dirac a néanmoins étudié en 1931 l'influence qu'aurait un tel objet sur une particule chargée électriquement et a montré que l'existence de charges magnétiques expliquerait la quantification des charges électriques [1].

Bien que de telles particules n'aient pas encore été découvertes, elles sont bien prédites par les théories actuelles. 't Hooft et Polyakov ont montré que dans toute théorie de grande unification, c'est-à-dire une théorie de jauge contenant entre autres un sous-groupe U(1), des monopôles magnétiques sont solutions des équations du mouvement [2, 3]. Bogomol'nyi, Prasad et Sommerfeld (BPS) ont également déterminé la masse de telles particules [4, 5, 6]. Nous présentons dans la suite ces théories, après introduction des notions de théorie de jauge et de brisure spontanée de symétrie. Avant toute chose, le monopôle de Dirac est exposé.

2. MONOPÔLE DE DIRAC

2.1. Dualité électromagnétique

L'électromagnétisme est dirigé par les équations de Maxwell. Dans le vide, elles sont données par

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}, \quad (1)$$

où \vec{E} et \vec{B} sont respectivement les champs électrique et magnétique et c est la célérité de la lumière dans le vide. Ces équations sont invariantes sous les transformations de Lorentz. On peut les écrire sous forme covariante en définissant le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ par

$$\begin{cases} F^{0i} = -F^{i0} = -E^i/c \\ F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k \end{cases}. \quad (2)$$

Les équations de Maxwell dans le vide prennent alors la forme

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

où ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ est le tenseur dual.

Ces équations sont également invariantes sous la symétrie de dualité électromagnétique, qui consiste à échanger \vec{E} et \vec{B} :

$$(\vec{E}, \vec{B}) \longrightarrow (c\vec{B}, -\vec{E}/c). \quad (4)$$

Dans un formalisme covariant, cette transformation est $(F^{\mu\nu}, {}^*F^{\mu\nu}) \rightarrow ({}^*F^{\mu\nu}, -F^{\mu\nu})$.

En présence de sources, les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}, \quad (5)$$

où (ρ, \vec{j}) sont les sources des champs électrique et magnétique. Les monopôles magnétiques sont bien proscrits : le champ magnétique, étant de divergence nulle, ne peut pas avoir de sources ponctuelles. Sous forme covariante, les Équations (5) deviennent

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \\ \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

où $J^\nu = (c\rho, \vec{j})$ est le quadricourant. Sous cette forme, c'est l'équation du tenseur dual qui interdit les monopôles magnétiques.

Afin de maintenir la symétrie de dualité en présence de sources, il convient de définir des sources magnétiques en posant un quadrivecteur K^μ tel que les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \\ \partial_\mu^* F^{\mu\nu} = \mu_0 K^\nu \end{cases} \quad (7)$$

Il faut également ajouter la transformation $(J^\mu, K^\mu) \rightarrow (K^\mu, -J^\mu)$ à la transformation de dualité.

Sous cette forme symétrisée, $\partial_\mu^* F^{\mu\nu} \neq 0$ autorise la présence de sources ponctuelles de champ magnétique, i.e. de monopôles magnétiques. On peut donc s'interroger sur l'influence de telles sources sur une particule quantique.

Dans la suite de cet article, nous nous placerons en unités naturelles en notant les actions en unité de \hbar et les vitesses en unité de c .

2.2. Quantification de Dirac

Dirac a étudié l'influence d'un monopôle magnétique sur une particule et a démontré que ce type de champ impose une relation de quantification des charges électriques et magnétiques [1]. Considérons un champ magnétique dérivant d'une charge ponctuelle :

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (8)$$

où g est la charge magnétique. On a donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi g \delta(\vec{r})$.

Considérons à présent une particule de charge électrique e , d'impulsion \vec{p} et d'énergie E . Lors de sa propagation libre, cette particule est représentée par la fonction d'onde

$$\psi = \psi_0 e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}.$$

En présence du champ magnétique, son impulsion change, en première approche, selon $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$, où \vec{A} est le potentiel vecteur, tel que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. La fonction d'onde devient donc

$$\psi \rightarrow e^{-ie\vec{A} \cdot \vec{r}} \psi.$$

La phase α du champ est modifiée, $\alpha \rightarrow \alpha - e\vec{A} \cdot \vec{r}$. Sur un contour fermé, par exemple le cercle \mathcal{C} de latitude

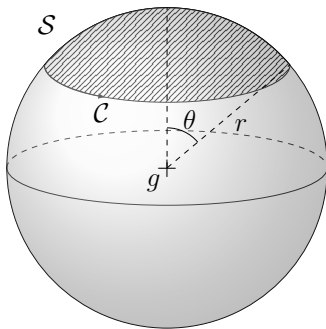


Fig. 1 La variation de phase de ψ sur le cercle \mathcal{C} de latitude θ sur la sphère de rayon r est proportionnelle au flux du champ magnétique à travers la surface \mathcal{S} hachurée.

θ fixée sur la sphère de rayon r (Figure 1), la variation de phase est

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= e \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= e \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

Dans la limite $\theta \rightarrow \pi$, $\Delta\alpha$ est donnée par le flux de \vec{B} à travers la sphère de rayon r , i.e.

$$\Delta\alpha = 4\pi eg. \quad (9)$$

Pour que ψ soit mono-valuée, il convient d'imposer $\Delta\alpha = 2\pi n$, avec $n \in \mathbb{N}$. On obtient alors la condition de quantification de Dirac

$$eg = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Cette condition impose, s'il existe une charge magnétique quelque part dans l'univers, la quantification des charges électriques. Ce serait une possible explication du fait que toutes les charges observées soient multiples de la charge de l'électron $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C.

Étudions à présent la forme du potentiel vecteur \vec{A} . On peut par exemple considérer, en coordonnées sphériques,

$$\vec{A}_+ = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \vec{e}_\phi.$$

On a bien $\vec{\nabla} \times \vec{A}_+ = \vec{B}$ dans tout l'espace, sauf sur la demi-droite $\theta = \pi$. De même,

$$\vec{A}_- = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \vec{e}_\phi$$

vérifie $\vec{\nabla} \times \vec{A}_- = \vec{B}$ partout sauf sur la demi-droite $\theta = 0$. Ceci est un résultat général : tous les \vec{A} vérifiant $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ dans une région de l'espace sont singuliers sur une région de dimension 1. Ces régions sont appelées les cordes de Dirac.

Le monopôle de Dirac permet donc l'explication de la quantification de la charge, mais le potentiel vecteur y étant associé présente des singularités. Nous allons voir dans la suite qu'il existe d'autres monopôles, dont les solutions sont définies partout. Ces monopôles sont dits topologiques, dans la mesure où aucune source de champ magnétique ne doit être introduite, le monopôle est dû à la nature intrinsèque des champs. Dans le but d'étudier ces solutions, nous introduisons dans la suite les notions de théorie de jauge et de brisure spontanée de symétrie.

3. THÉORIES DE JAUGE

Le monopôle de t'Hooft-Polyakov est basé sur une théorie de jauge non-abélienne. Afin de comprendre les concepts qui y sont associés, nous introduisons dans un premier temps la théorie de jauge $U(1)$, abélienne, puis la théorie de Yang-Mills, qui se fonde sur des groupes non-abéliens.

3.1. Jauge U(1)

Nous montrons dans cette section que l'électromagnétisme dérive de l'extension d'une invariance globale de jauge à une invariance locale.

Considérons un champ scalaire complexe ϕ , représentant une particule de charge e , dépendant des variables d'espace-temps x^μ et de densité Lagrangienne

$$\mathcal{L}_\phi(\phi, \partial_\mu \phi) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi). \quad (11)$$

Le système est invariant sous les transformations de phase constante

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{ie\alpha} \phi \\ \phi^* \rightarrow (\phi^*)' = e^{-ie\alpha} \phi^* \end{cases}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

c'est-à-dire sous les transformations du groupe U(1) des nombres complexes de norme 1. Une telle transformation est appelée une transformation globale, elle est la même en tout point de l'espace temps. L'interprétation probabiliste de la mécanique quantique imposant par exemple l'invariance par changement de phase en tout point de l'espace, on peut transformer la transformation globale en une transformation locale en prenant comme paramètre α une fonction des x^μ dans \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{ie\alpha(x)} \phi \\ \phi^* \rightarrow (\phi^*)' = e^{-ie\alpha(x)} \phi^* \end{cases}. \quad (13)$$

Observons alors comment se transforment les dérivées de ϕ . Comme la transformation n'affecte pas les variables d'espace-temps, l'opérateur dérivation n'est pas modifié. Alors

$$\begin{cases} (\partial_\mu \phi)' = \partial_\mu (\phi)' = e^{ie\alpha(x)} (\partial_\mu \phi + ie \phi \partial_\mu \alpha(x)) \\ (\partial_\mu \phi^*)' = \partial_\mu (\phi^*)' = e^{-ie\alpha(x)} (\partial_\mu \phi^* - ie \phi^* \partial_\mu \alpha(x)) \end{cases}. \quad (14)$$

$\partial_\mu \phi$ et $\partial_\mu \phi^*$ ne sont donc pas covariantes, elles ne se transforment pas comme ϕ et ϕ^* sous la transformation locale.

La densité Lagrangienne \mathcal{L}_ϕ n'est alors pas invariante sous la transformation de jauge U(1) locale. Afin de rendre la théorie invariante pour cette transformation, on cherche une dérivée D_μ , dite covariante, telle que $(D_\mu \phi)' = e^{ie\alpha(x)} D_\mu \phi$. Cherchons D_μ sous la forme $D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi$. Alors

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)' &= (\partial_\mu \phi)' + ieA'_\mu \phi' \\ &= e^{ie\alpha(x)} D_\mu \phi + ie(A'_\mu - A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)) \phi'. \end{aligned}$$

Pour rendre D_μ covariante, on impose la relation de transformation de A_μ

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x). \quad (15)$$

A_μ est appelé champ de jauge. La constante e associée à ϕ donne alors l'intensité du couplage de ϕ à A_μ . On peut créer de même une dérivée covariante $D_\mu \phi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*$. Il est important de remarquer que, dans le but de créer une dérivée covariante, nous avons dû ajouter un champ au système, nous lui avons ajouté des degrés de liberté. A_μ n'est pas une simple fonction de x , c'est une nouvelle variable du Lagrangien.

En remplaçant $\partial_\mu \phi$ et $\partial_\mu \phi^*$ par $D_\mu \phi$ et $D_\mu \phi^*$ dans l'expression de \mathcal{L}_ϕ , on rend le système invariant sous la transformation de jauge locale. Le système n'est alors plus libre, il présente un terme d'interaction du champ de matière ϕ avec le champ de jauge :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= D_\mu \phi^* D^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) + ieA_\mu (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \\ &\quad + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi. \end{aligned} \quad (16)$$

L'invariance locale de jauge mène donc à l'ajout d'interactions entre les champs de matière et de jauge.

On peut utiliser la dérivée covariante afin de créer de nouvelles quantités covariantes. Construisons ainsi une quantité covariante dépendant uniquement du champ de jauge :

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = ieF_{\mu\nu} \phi, \quad (17)$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est appelé la force du champ. C'est une quantité invariante sous la transformation locale de jauge. L'identité de Jacobi

$$([D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]]) \phi = 0 \quad (18)$$

nous donne alors une équation en $F_{\mu\nu}$:

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0, \quad (19)$$

où l'on a utilisé

$$\begin{aligned} [D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] \phi &= ieD_\mu (F_{\nu\rho} \phi) - ieF_{\nu\rho} D_\mu \phi \\ &= ieD_\mu (F_{\nu\rho}) \phi. \end{aligned}$$

On vérifie alors que le tenseur $F_{\mu\nu}$ satisfait l'identité de Bianchi

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} &= 0 \\ \text{i.e. } \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Le tenseur de force du champ de jauge peut également être utilisé pour décrire l'évolution propre du champ de jauge, par le Lagrangien

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (21)$$

où le facteur $-1/4$ est conventionnel. La densité Lagrangienne du système total, i.e. décrivant l'évolution du champ de matière ϕ et du champ de jauge A_μ est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_A \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) + ieA_\mu (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \\ &\quad + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (22)$$

La théorie que nous sommes en train de construire commence réellement à ressembler à celle de l'électrodynamique, en considérant que le champ de jauge joue le rôle du quadripotential. Pour que l'analogie soit complète, il ne manque en fait que les équations de Maxwell sources. Pour les obtenir, appliquons les équations d'Euler-Lagrange par rapport à A_ν à la densité Lagrangienne \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\ \text{i.e. } \partial_\mu F^{\mu\nu} &= ie(\phi^* D^\nu \phi - \phi D^\nu \phi^*) \end{aligned}$$

En posant le courant $J^\mu = ie(\phi^* \overleftrightarrow{D}^\mu \phi - \phi \overleftrightarrow{D}^\mu \phi^*)$, on obtient bien les équations inhomogènes de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (23)$$

J^μ est une quantité conservée du fait de l'antisymétrie de $F^{\mu\nu}$. C'est en fait le courant de Noether associé à la transformation globale définie en Équation (12).

Les champs électrique et magnétique de l'électrodynamique sont donc les champs \vec{E} et \vec{B} tels que

$$\begin{cases} F^{0i} = -E^i \\ F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k \end{cases}. \quad (24)$$

L'énergie du système, définie comme la quantité conservée pour une translation temporelle, est alors

$$\begin{aligned} E &= \int \left(\frac{1}{2} \vec{B}^2 + \frac{1}{2} \vec{E}^2 + D_0 \phi^* D_0 \phi \right. \\ &\quad \left. + D_i \phi^* D_i \phi + V(\phi^* \phi) \right) d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Pour ce qui est des monopôles magnétiques, ils sont interdits dans la théorie de jauge U(1) : l'Équation (20) impose que le champ magnétique soit de divergence nulle. Ce ne sera pas le cas pour les théories de jauge basées sur des groupes non-abéliens, comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.2. Jauge non-abélienne : théorie de Yang-Mills

La théorie de jauge présentée en Section 3.1 peut être étendue à d'autres groupes que U(1). La théorie de Yang-Mills [7], établie en 1954, constitue une extension des théories de jauge à des groupes non-abéliens, i.e. dont la loi n'est pas commutative.

Considérons un groupe de Lie G réel compact de dimension n et $\mathcal{L}(G)$ son algèbre de Lie. $\forall a \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathbf{T}_a les générateurs de $\mathcal{L}(G)$ et $f_{ab}{}^c$ ses constantes de structure, telles que

$$\forall a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad [\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = f_{ab}{}^c \mathbf{T}_c. \quad (26)$$

Dans la suite, nous noterons en gras les éléments de l'espace interne $\mathcal{L}(G)$, et les indices désignant les composantes dans cette algèbre seront notés entre parenthèses.

Soit maintenant ϕ un m -uplet de champs scalaires réels de matière, dépendant des variables d'espace-temps x_μ . On prendra en fait $\phi \in E$, avec E un espace vectoriel réel de dimension m et dans la suite on considèrera une représentation (ρ, E) de $\mathcal{L}(G)$. Afin d'alléger les notations, on identifie dans la suite chaque élément \mathbf{g} de l'algèbre à sa représentation $\rho(\mathbf{g})$ sur E .

Soit \mathcal{L}_ϕ la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi) - V(\phi \cdot \phi), \quad (27)$$

où \cdot désigne un produit scalaire de E invariant sous l'action de G . Pour $U \in G$, \mathcal{L}_ϕ est invariant sous la transformation globale définie par

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U \phi(x). \quad (28)$$

On peut étendre cette transformation en une transformation locale, i.e. telle que $U \in G$ soit une fonction de x :

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x) \phi(x).$$

La dérivée $\partial_\mu \phi$ du champ n'est alors pas covariante :

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow (\partial_\mu \phi(x))' = U(x) \partial_\mu \phi(x) + (\partial_\mu U(x)) \phi(x).$$

Comme pour la théorie de jauge U(1), on cherche une dérivée covariante D_μ telle que $(D_\mu \phi(x))' = U(x) D_\mu \phi(x)$. On peut la chercher sous la forme

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) - e \mathbf{W}_\mu \phi(x), \quad (29)$$

où $\mathbf{W}_\mu = W_\mu^{(a)} \mathbf{T}_a$ appartient à l'algèbre $\mathcal{L}(G)$. Chaque $W_\mu^{(a)}$ est un champ de jauge, il y en a autant que la dimension de l'algèbre. Alors

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)' &= U D_\mu \phi \\ &\quad + [(\partial_\mu U) U^{-1} + e U \mathbf{W}_\mu U^{-1} - e \mathbf{W}_\mu'] U \phi. \end{aligned}$$

Pour que la dérivée soit covariante, \mathbf{W}_μ doit donc se transformer selon :

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu' = U \mathbf{W}_\mu U^{-1} + \frac{1}{e} (\partial_\mu U) U^{-1}. \quad (30)$$

Dans le cas $G = U(1)$ et $U = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on retrouve bien la transformation (15).

La densité Lagrangienne invariante sous la transformation locale est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= (\partial_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi) - V(\phi \cdot \phi) \\ &\quad + e^2 (\mathbf{W}_\mu \phi) \cdot (\mathbf{W}^\mu \phi) \\ &\quad - e ((\partial_\mu \phi) \cdot (\mathbf{W}^\mu \phi) + (\mathbf{W}_\mu \phi) \cdot (\partial^\mu \phi)) \end{aligned} \quad (31)$$

On voit ici encore que la théorie de jauge décrit un système en interaction. Les champs de jauge couplent les différentes composantes du champ ϕ entre elles, ce sont donc les médiateurs des interactions.

On peut également construire le tenseur force du champ $\mathbf{G}_{\mu\nu}$:

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = -e \mathbf{G}_{\mu\nu} \phi$$

$$\text{i.e. } \mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu - e [\mathbf{W}_\mu, \mathbf{W}_\nu]. \quad (32)$$

On peut remarquer ici que le caractère non-abélien du groupe impose un terme quadratique en \mathbf{W}_μ , qui va induire de nouveaux termes sources dans les équations du mouvement. Du point de vue de l'algèbre de Lie, $\mathbf{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(a)} \mathbf{T}_a$, et

$$G_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu W_\nu^{(a)} - \partial_\nu W_\mu^{(a)} - e f_{bc}{}^a W_\mu^{(b)} W_\nu^{(c)}.$$

On peut à présent chercher les équations définissant le tenseur $\mathbf{G}_{\mu\nu}$, c'est-à-dire l'analogue des équations de Maxwell dans le cas non-abélien. Pour cela, définissons une dérivée covariante de $\mathbf{G}_{\mu\nu}$:

$$D_\mu \mathbf{G}_{\nu\rho} = \partial_\mu \mathbf{G}_{\nu\rho} - e [\mathbf{W}_\mu, \mathbf{G}_{\nu\rho}]. \quad (33)$$

L'identité de Jacobi (18) impose alors

$$D_\mu \mathbf{G}_{\nu\rho} + D_\nu \mathbf{G}_{\rho\mu} + D_\rho \mathbf{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (34)$$

L'équation $\partial_\mu \mathbf{G}_{\nu\rho} + \partial_\nu \mathbf{G}_{\rho\mu} + \partial_\rho \mathbf{G}_{\mu\nu} = 0$ n'est alors plus vérifiée. En électromagnétisme, c'est elle qui impose la condition de divergence nulle pour le champ magnétique. Dans le cas non-abélien, la présence de termes sources permet l'émergence de monopôles magnétiques, comme nous le verrons dans la suite pour le cas de $\text{SO}(3)$.

Il reste enfin à définir la densité Lagrangienne d'évolution propre du champ de jauge. Comme dans le cas $\text{U}(1)$, ce terme doit comporter des termes quadratiques en les dérivées de \mathbf{W}_μ , être invariant sous la transformation locale de jauge et préserver la parité. On a donc

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{4e^2} G_{\mu\nu}^{(a)} G^{(a)\mu\nu}, \quad (35)$$

où la sommation sur l'indice (a) est sous-entendue.

Le système constitué des champs de matière et de jauge est alors décrit par la densité Lagrangienne $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_W$. On obtient les équations du mouvement grâce aux équations d'Euler-Lagrange. Dans le cas du champ de jauge, on obtient

$$\begin{aligned} \partial^\mu \mathbf{G}_{\mu\nu} &= J_\nu + e[\mathbf{W}^\mu, \mathbf{G}_{\mu\nu}] \\ \text{i.e. } D^\mu \mathbf{G}_{\mu\nu} &= J_\nu, \end{aligned} \quad (36)$$

où $J^\mu = -e(\phi \cdot (D^\mu \phi) + (D^\mu \phi) \cdot \phi)$. Dans le cas d'une jauge non-abélienne, les champs de jauge interviennent donc comme des sources. Ceci induit toute une physique nouvelle, comme nous allons le voir dans l'exemple du monopôle de 't Hooft-Polyakov.

Afin de faire l'analogie avec la théorie de jauge $\text{U}(1)$, on peut définir des champs électrique et magnétique pour chaque boson de jauge $W_\mu^{(a)}$:

$$\begin{cases} G^{0i(a)} = -E^{i(a)} \\ G^{ij(a)} = -\varepsilon_{ijk} B^{k(a)} \end{cases} \quad (37)$$

L'énergie du système est alors

$$\begin{aligned} E &= \int \left[\frac{1}{2} E^{i(a)} E^{i(a)} + \frac{1}{2} B^{i(a)} B^{i(a)} + V(\phi \cdot \phi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (D_0 \phi \cdot D_0 \phi + D_i \phi \cdot D_i \phi) \right] d^3 \vec{x}. \end{aligned} \quad (38)$$

Ces champs ne seront considérés comme magnétiques et électriques que s'ils sont associés à un boson analogue au photon.

4. BRISURES SPONTANNÉES DE SYMÉTRIE

Dans la section précédente, nous avons vu qu'une théorie de jauge permet de décrire les interactions entre les champs de matière, et que ces interactions sont transportées par des champs de jauge. Ces champs de jauge ne sont pas massifs, leur densité Lagrangienne d'évolution libre ne comporte pas de terme en $m^2 W_\mu^{(a)} W^{\mu(a)}$ qui mènerait à une équation de type Klein-Gordon. Un tel terme n'est en fait pas invariant sous la transformation de jauge, il briserait la symétrie. On sait cependant que les bosons médiateurs des interactions peuvent être massifs, comme les bosons W^\pm et Z^0 de l'interaction faible.

Le mécanisme expliquant la masse des champs d'interaction utilise les brisures spontanées de symétrie. Il a été introduit par Higgs, Englert et Brout en 1964 [8, 9]. Ils ont montré que l'introduction d'un champ scalaire, appelé champ de Higgs, dans la densité Lagrangienne peut briser sa symétrie à l'état fondamental, et ainsi imposer un terme de masse. Nous allons présenter ici son application à la théorie de jauge $\text{U}(1)$.

4.1. Brisure de symétrie globale de la symétrie $\text{U}(1)$

Considérons la densité Lagrangienne \mathcal{L} définie en Équation (11), avec le potentiel

$$V(\phi^* \phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi + a)^2, \quad (39)$$

où a et λ sont des constantes et $\lambda > 0$, afin que V possède un minimum. Cette densité Lagrangienne décrit l'évolution du champ de Higgs seulement. L'énergie du système est

$$E = \int (\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \partial_i \phi^* \partial_i \phi + V(\phi^* \phi)) d^3 \mathbf{x}. \quad (40)$$

L'état fondamental, aussi appelé vide de Higgs, est la configuration qui minimise l'énergie E . Les termes $\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi$ et $\partial_i \phi^* \partial_i \phi$ étant positifs, ils s'annulent au fondamental. Le vide de Higgs ϕ_0 est donc une constante d'espace temps, et il minimise V .

Si $a > 0$, $\phi_0 = 0$ est l'unique minimum de V (Figure 2). Il est invariant sous la transformation de jauge $\text{U}(1)$, et la densité Lagrangienne \mathcal{L} est inchangée au voisinage de ϕ_0 . La symétrie est donc conservée.

Si $a = -\mu^2 < 0$, tous les ϕ_0 tels que $|\phi_0| = \mu$ minimisent V , l'état fondamental est dégénéré (Figure 2). Considérons $\phi_0 = \mu$, et faisons un développement perturbatif au voisinage de ϕ_0 . On pose ainsi

$$\phi(x) = \phi_0 + \chi(x) + i\theta(x), \quad (41)$$

où χ et θ sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . Au deuxième ordre en χ et θ , la densité Lagrangienne est

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \lambda \mu^2 \chi^2. \quad (42)$$

Une première remarque est que la densité Lagrangienne n'est plus invariante sous la transformation $\text{U}(1)$. Pour les champs réels χ et θ , la transformation (12) est en effet

$$\begin{cases} \chi \rightarrow \chi' = \cos(q\alpha) \chi - \sin(q\alpha) \theta \\ \theta \rightarrow \theta' = \sin(q\alpha) \chi + \cos(q\alpha) \theta \end{cases},$$

et le terme en χ^2 n'est pas compensé. On remarque également que cette brisure de symétrie induit l'apparition de deux champs χ et θ , assimilables à des particules, dont l'un est massif : χ a une masse de $\mu\sqrt{2\lambda}$ et θ est de masse nulle.

Ce modèle simple permet de comprendre comment émerge une brisure de symétrie et ses conséquences. On parle de brisure spontanée de symétrie lorsqu'un système possède une symétrie, mais que son état fondamental n'est pas invariant sous cette symétrie. Cette brisure

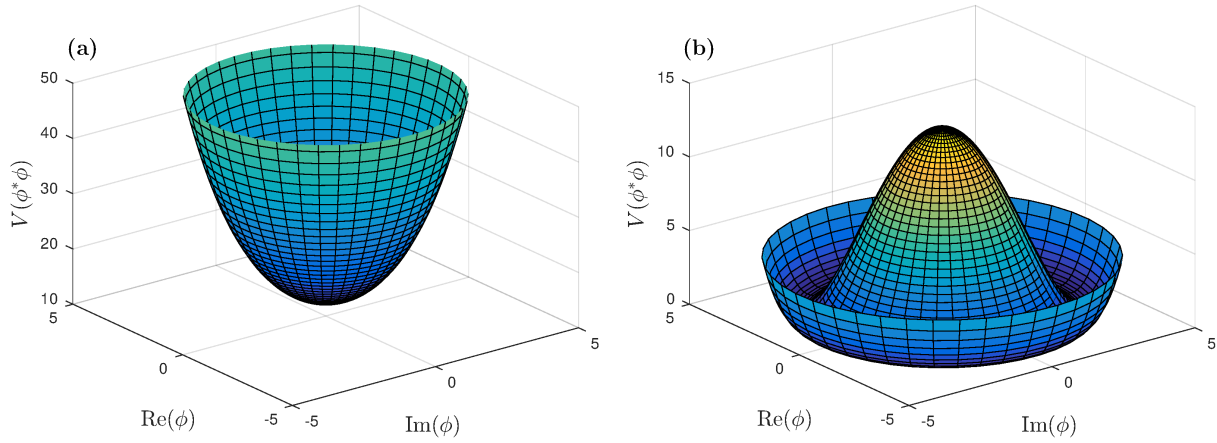


Fig. 2 Potentiel du champ de Higgs pour la symétrie U(1), défini en Équation (39). (a) Pour $a > 0$, le potentiel possède un unique minimum atteint en $\phi_0 = 0$ et la symétrie U(1) est conservée. (b) Pour $a < 0$, le vide de Higgs est dégénéré : tous les $\phi_0 = \mu e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ minimisent V . Le minimum est donc atteint en des points équivalents à une transformation de phase près, i.e. une transformation du groupe U(1). Le potentiel a alors une forme de chapeau mexicain. La symétrie est brisée au voisinage de la configuration de plus basse énergie.

implique une réécriture de la densité Lagrangienne au voisinage de l'état fondamental, où certains degrés de liberté apparaissent sous forme de particules. Parmi celles-ci, il en existe toujours une de masse nulle, nommée boson de Goldstone.

4.2. Mécanisme de Higgs pour la symétrie U(1)

Appliquons maintenant le mécanisme de Higgs au cas d'une symétrie de jauge, et observons comment émerge la masse du boson d'interaction. Nous nous plaçons encore une fois dans le cas de la jauge U(1) locale. La densité Lagrangienne décrivant l'évolution du champ de Higgs et du champs de jauge est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_\mu\phi^*D^\mu\phi - V(\phi^*\phi). \quad (43)$$

Au regard de l'étude précédente, prenons comme potentiel $(\lambda/4)(\phi^*\phi - \mu^2)^2$. L'énergie du système est alors

$$E = \int \left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 + D_0\phi^*D_0\phi + D_i\phi^*D_i\phi + V(\phi^*\phi) \right) d^3\vec{x}. \quad (44)$$

Pour minimiser E , on a donc

$$\begin{cases} E_i = B_i = 0 & (45a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_0\phi^*D_0\phi = 0 & (45b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_i\phi^*D_i\phi = 0 & (45c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(\phi^*\phi) \text{ minimal.} & (45d) \end{cases}$$

La condition (45a) implique que le champ de jauge A_μ soit une jauge pure, i.e. $A_\mu = -\partial_\mu\alpha$. Les Équations (45b) et (45c) deviennent alors $\partial_\mu\phi - ie(\partial_\mu\alpha)\phi = 0$, i.e. $\phi(x) = Ae^{ie\alpha(x)}$, avec A une constante. L'extremalisation de V impose enfin $|\phi| = \mu$. L'état fondamental du système est donc

$$\begin{cases} \phi(x) = \mu e^{ie\alpha(x)} \\ A_\mu(x) = -\partial_\mu\alpha(x) \end{cases}.$$

Le choix de α tient de la liberté de jauge. Étudions le cas $\alpha = 0$ et une perturbation des champs autour de l'état fondamental :

$$\begin{cases} \phi(x) = \mu + \chi(x) + i\theta(x) \\ A_\mu(x) = A_\mu(x) \end{cases}. \quad (46)$$

Comme précédemment, χ et θ sont des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} . Le Lagrangien (43) devient donc, au second ordre en χ , θ et A_μ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \lambda\mu^2\chi^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &+ e^2\mu^2 \left(A_\mu + \frac{1}{e\mu}\partial_\mu\theta \right) \left(A^\mu + \frac{1}{e\mu}\partial^\mu\theta \right). \end{aligned}$$

Posons $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{1}{e\mu}\partial_\mu\theta$, ce qui revient à transformer le champs de jauge par une transformation du groupe de jauge. $F_{\mu\nu}$ ne change alors pas d'expression, et le Lagrangien devient

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \lambda\mu^2\chi^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + e^2\mu^2\tilde{A}_\mu\tilde{A}^\mu. \quad (47)$$

Comme précédemment, le système n'est plus invariant sous la transformation de jauge, on a donc une brisure de symétrie. Cette dernière mène encore une fois à une nouvelle particule, représentée par le champ χ , de masse $m_H = \mu\sqrt{2\lambda}$. C'est elle qu'on appelle boson de Higgs. On remarque également que le champ de jauge acquiert une masse $m_V = e\mu\sqrt{2}$! Ceci montre bien comment le mécanisme de Higgs donne une masse au boson de jauge. On remarque également que le champ de Goldstone n'apparaît plus dans le système, il est absorbé dans la transformation de jauge.

Après avoir introduit les théories de jauge et les brisures spontanées de symétrie, nous allons les utiliser dans le cas particulier du monopôle de t'Hooft-Polyakov.

5. MONOPÔLE DE 'T HOOFT-POLYAKOV

't Hooft et Polyakov ont séparément montré en 1974 qu'un monopôle magnétique peut émerger dans une théorie des champs [2, 3]. Comme nous allons le voir, ces monopôles sont des objets topologiques, dûs à la nature intrinsèque des champs.

Avant toute chose, nous introduisons les notations et représentations de $\text{SO}(3)$ dont nous allons avoir besoin.

5.1. Préambule

$\text{SO}(3)$ est un groupe de Lie de dimension 3. Les constantes de structure de son algèbre $\mathfrak{so}(3)$ sont définies à partir du tenseur de Levi-Civita : $f_{ab}{}^c = \varepsilon_{ab}{}^c$. On note $\mathbf{T}_i, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ses générateurs.

Nous allons considérer une réalisation vectorielle de $\mathfrak{so}(3)$, c'est-à-dire que nous associons à chaque $\mathbf{W} = W^{(i)}\mathbf{T}_i$ un vecteur $\vec{W} = (W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$. On adopte la même représentation pour le champ de Higgs, qui est alors un triplet de champs scalaires réels : $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3$.

Dans la représentation adjointe, on associe à chaque $\mathbf{X} \in \mathfrak{so}(3)$ l'endomorphisme $\text{ad}_{\mathbf{X}}$ de $\mathfrak{so}(3)$, défini par

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathbf{X}} : \mathfrak{so}(3) &\longrightarrow \mathfrak{so}(3) \\ \mathbf{Y} &\longmapsto [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \end{aligned}$$

On peut alors réaliser cette représentation matriciellement, en associant à chaque $\text{ad}_{\mathbf{X}}$ une matrice $\rho(\mathbf{X})$ 3×3 à coefficients réels. Dans cette réalisation, les générateurs de l'algèbre prennent la forme $(\rho(\mathbf{T}_i))_{jk} = -\varepsilon_{ijk}$. L'action de $\mathbf{W} = W^{(i)}\mathbf{T}_i$ sur le champ de Higgs $\vec{\phi}$ est alors définie par

$$\begin{aligned} (\rho(\mathbf{W})\vec{\phi})_i &= W^{(k)}(\rho(\mathbf{T}_k))_{ij}\phi_j \\ &= -\varepsilon_{ijk}\phi_j W^{(k)} \\ \text{i.e. } \rho(\mathbf{W})\vec{\phi} &= \vec{W} \times \vec{\phi}. \end{aligned}$$

Les équations de structure de la théorie de Yang-Mills pour cette réalisation de $\mathfrak{so}(3)$ sont alors

$$\begin{cases} \vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - e \vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu \\ D_\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \vec{\phi} - e \vec{W}_\mu \times \vec{\phi} \end{cases} \quad (48)$$

Nous adopterons ces notations dans la suite.

5.2. Équations du mouvement

Considérons une densité Lagrangienne inspirée de la partie bosonique du modèle de Georgi et Glashow [10], donnant la propagation libre d'un champ de jauge $\text{SO}(3)$ dans sa représentation adjointe, à laquelle on ajoute un champ de Higgs :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \vec{G}^{\mu\nu} \cdot \vec{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^\mu \vec{\phi} \cdot D_\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}), \quad (49)$$

avec $V(\vec{\phi}) = (\lambda/4) (\vec{\phi}^2 - \mu^2)^2$.

Les équations d'Euler-Lagrange permettent alors d'obtenir les équations du mouvement :

$$\begin{cases} D_\mu \vec{G}^{\mu\nu} = -e \vec{\phi} \times D^\nu \vec{\phi} \\ D_\mu D^\mu \vec{\phi} = -\lambda (\vec{\phi}^2 - \mu^2) \vec{\phi}. \end{cases} \quad (50a) \quad (50b)$$

Dans la suite ce sont ces équations que nous allons tâcher d'intégrer.

L'énergie du système est

$$\begin{aligned} E = \int \left[\frac{1}{2} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + \frac{1}{2} \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i + V(\phi) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (D_0 \vec{\phi} \cdot D_0 \vec{\phi} + D_i \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi}) \right] d^3 \vec{x}. \end{aligned} \quad (51)$$

5.3. Spectre du modèle

Avant de chercher à résoudre les équations du mouvement, il peut être intéressant de déterminer le spectre du modèle, c'est-à-dire de déterminer les masses des bosons de jauge induites par le mécanisme de Higgs. Pour cela, adaptions la méthode développée en Section 4.2. Minimiser E implique donc

$$\begin{cases} E_i^{(a)} = B_i^{(a)} = 0 \\ D_0 \phi_i D_0 \phi_i = 0 \\ D_i \phi_j D_i \phi_j = 0 \\ V(\vec{\phi}) \text{ minimal.} \end{cases} \quad (52a) \quad (52b) \quad (52c) \quad (52d)$$

La condition (52a) implique que $W_\mu^{(a)}$ est une jauge pure, i.e. $\rho(\mathbf{W}_\mu)(x) = U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)$, avec $U \in \text{SO}(3)$. Les Équations (52b), (52c) imposent alors $\vec{\phi} = U(x)\vec{\phi}_0$. Enfin, pour minimiser le potentiel, le champ de Higgs doit vérifier $|\vec{\phi}|^2 = \mu^2$. Le vide de Higgs du système vérifie donc

$$\begin{cases} \vec{\phi} = U(x)\vec{\phi}_0, \text{ avec } |\vec{\phi}_0|^2 = \mu^2 \\ \rho(\mathbf{W}_\mu)(x) = U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \end{cases} \quad (53)$$

Le fondamental est donc dégénéré, et toutes les configurations d'énergie minimale sont équivalentes à une transformation de jauge près. Considérons alors $U = \mathbb{I}_3$, et un champ de Higgs $\vec{\phi}_0$ tel que $|\vec{\phi}_0|^2 = \mu^2$. Considérons maintenant une perturbation autour de cet état :

$$\begin{cases} \vec{W}_\mu(x) = \vec{W}_\mu(x) \\ \vec{\phi}(x) = \vec{\phi}_0 + \vec{\chi}(x) \end{cases}, \quad (54)$$

où $\vec{\chi}$ est une fonction de l'espace-temps dans \mathbb{R}^3 . Au second ordre en χ_i et $W_\mu^{(a)}$, on obtient le Lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \vec{G}^{\mu\nu} \cdot \vec{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \vec{\chi} \cdot \partial_\mu \vec{\chi} - \lambda \mu^2 (\vec{\phi}_0 \cdot \vec{\chi})^2 \\ & + \frac{e^2 \mu^2}{2} \left(\vec{W}_\mu \cdot \vec{W}^\mu - \frac{1}{\mu^2} (\vec{\phi}_0 \cdot \vec{W}^\mu) (\vec{\phi}_0 \cdot \vec{W}_\mu) \right) \\ & - e \partial_\mu \vec{\chi} \cdot (\vec{W}^\mu \times \vec{\phi}_0), \end{aligned} \quad (55)$$

où $\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu \sim \vec{G}_{\mu\nu}$ au premier ordre en $W_\mu^{(a)}$. On obtient ainsi un champ scalaire $\vec{\phi}_0 \cdot \vec{\chi}$ de masse

$m_H = \mu\sqrt{2\lambda}$, c'est le boson de Higgs. Le terme proportionnel à $e^2\mu^2/2$ donne une masse à deux bosons de jauge, correspondant aux deux projections de \vec{W}_μ dans le plan orthogonal à $\vec{\phi}$. Ces deux champs ont une masse $m_W = e\mu$, et le champ de jauge $A_\mu = \frac{1}{\mu}\vec{\phi} \cdot \vec{W}_\mu$ a une masse nulle.

Il est alors tentant d'assimiler ce champ de masse nulle à un photon. Pour cela définissons le tenseur $F_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu}\vec{\phi} \cdot \vec{G}_{\mu\nu}$. Il apparaît comme un bon candidat à la définition d'un monopôle magnétique. Son expression

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{e}{\mu} \left(\vec{W}_\nu \times \vec{W}_\mu \right) \cdot \vec{\phi} \quad (56)$$

est en effet analogue à celle du tenseur force du champ de l'électromagnétisme, mais possède un terme source supplémentaire. En utilisant la relation

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu} D_\lambda \vec{\phi} \cdot \vec{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} \vec{\phi} \cdot D_\lambda \vec{G}_{\mu\nu},$$

et les Équations (48), (34) et (36), on obtient

$$\begin{cases} \partial^\nu F_{\nu\mu} = j_\mu \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = k_\mu \end{cases}, \quad (57)$$

avec

$$\begin{cases} j_\mu = \frac{1}{\mu} D^\nu \vec{\phi} \cdot \vec{G}_{\nu\mu} + \frac{1}{\mu} \vec{\phi} \cdot \vec{J}_\mu \\ k_\mu = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^\nu \vec{\phi} \cdot \vec{G}^{\rho\sigma} \end{cases}.$$

\vec{J}_μ est défini en Équation (48), c'est le courant de Noether de la théorie de jauge SO(3). Ainsi le tenseur $F_{\mu\nu}$ vérifie les équations de Maxwell (7) avec des sources j_μ et k_μ ne dépendant que du couplage entre les champs de jauge et le champ de Higgs.

Le modèle de Georgi et Glashow décrit donc un système avec un photon, correspondant à la projection de \vec{W}_μ dans la direction du champ de Higgs $\vec{\phi}$. Il est décrit par le champ de jauge A_μ , associé au sous-groupe U(1) du groupe de jauge SO(3) des rotations dans le plan orthogonal à $\vec{\phi}$. Les deux autres champs de jauge, notés W_μ^+ et W_μ^- sont massifs et peuvent décrire une autre interaction que l'électromagnétisme. Ce modèle peut donc être utilisé comme un prototype de théories plus compliquées contenant un sous-groupe électromagnétique U(1).

On peut également définir des champs électrique et magnétique comme on le fait en électrodynamique :

$$\begin{cases} F^{0i} = -\mathcal{E}^i \\ F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \mathcal{B}^k \end{cases}. \quad (58)$$

La recherche d'un monopôle magnétique consiste donc à chercher une solution des équations du mouvement pour laquelle \vec{B} décrit un monopôle.

5.4. Recherche d'un ansatz

Afin de simplifier les équations, nous allons chercher une solution statique à symétrie sphérique des équations du mouvement, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} W_0^{(a)} = 0 \\ W_i^{(a)} = W_i^{(a)}(r) \\ \phi_i = \phi_i(r) \end{cases},$$

où r est la distance à l'origine pour un système de coordonnées sphériques.

Pour une telle configuration, l'énergie devient

$$E = \int \left[\frac{1}{2} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + \frac{1}{2} D_i \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi} + \frac{\lambda}{4} \left(\vec{\phi}^2 - \mu^2 \right)^2 \right] d^3 \vec{x}.$$

Une condition nécessaire pour que l'énergie soit finie est qu'aux bords, i.e. en l'infini, le système soit dans une configuration d'énergie minimale, dans un vide de Higgs. Le champ de Higgs doit donc vérifier la condition (52d) asymptotiquement,

$$\text{i.e.} \quad \vec{\phi}^2(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \mu^2.$$

Notons $\vec{n} = \vec{r}/r$ et $\vec{\phi}_0 = \mu \vec{n}$. La condition (52c) impose également

$$D_i \phi_0^a = \frac{\mu}{r} (\delta_i^a - n_i n^a) - e \varepsilon^a{}_{bc} W_{i,0}^{(b)} \phi_0^c = 0,$$

ce qui donne les conditions aux limites pour $W_i^{(a)}$:

$$W_i^{(a)}(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} W_{i,0}^{(a)} = -\frac{1}{er} \varepsilon^a{}_{ij} n^j.$$

Pour assurer la convergence de l'énergie, il reste à vérifier que $\vec{G}_{ij} \cdot \vec{G}_{ij} = 2 \vec{B}_k \cdot \vec{B}_k$ est intégrable en $+\infty$, i.e. qu'il décroisse en $+\infty$ vers 0 plus rapidement que $1/r^3$. Or

$$\begin{cases} \partial_i W_{j,0}^a = -\frac{1}{er^2} \varepsilon^a{}_{jk} (\delta_i^k - 2n_i n^k) = \sigma \left(\frac{1}{r^2} \right) \\ W_{i,0}^a W_{j,0}^b = \sigma \left(\frac{1}{r^2} \right) \end{cases},$$

donc $\vec{G}_{ij} \cdot \vec{G}_{ij} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \sigma \left(\frac{1}{r^4} \right)$. Cette décroissance étant suffisante pour assurer la convergence de E en l'infini, les conditions aux limites sur nos champs sont

$$\begin{cases} \vec{\phi}_0 = \mu \vec{n} \\ W_{i,0}^{(a)} = -\frac{1}{er} \varepsilon^a{}_{ij} n^j \end{cases}. \quad (59)$$

C'est cette configuration qui définit notre vide de Higgs.

On peut alors chercher $\vec{\phi}$ et $W_i^{(a)}$ sous les formes suivantes, suggérées par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \vec{\phi}(r) = \frac{\mu}{r} H(r) \vec{n} \\ W_i^{(a)}(r) = -\frac{1}{er} \varepsilon^a{}_{ij} n^j (1 - K(r)) \end{cases}, \quad (60)$$

où H et K sont des fonctions arbitraires. C'est l'ansatz de 't Hooft-Polyakov. Compte tenu du comportement asymptotique des champs, H et K ont comme conditions aux limites

$$\begin{cases} H(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} r \\ K(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}. \quad (61)$$

Ces fonctions doivent également être assez lisses en l'origine pour que l'énergie y soit définie. Ainsi H et $K - 1$ doivent en 0 tendre vers 0 au moins linéairement en r :

$$\begin{cases} H(r) \underset{r \rightarrow 0}{=} O(r) \\ K(r) - 1 \underset{r \rightarrow 0}{=} O(r) \end{cases} . \quad (62)$$

Il ne reste alors plus qu'à déterminer les équations vérifiées par H et K . En injectant l'ansatz (60) dans les Équations (50), on obtient

$$\begin{cases} \zeta^2 \frac{d^2 K}{d\zeta^2} = KH^2 + K(K^2 - 1) \\ \zeta^2 \frac{d^2 H}{d\zeta^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(H^2 - \zeta^2) \end{cases} , \quad (63)$$

où $\zeta = e\mu r$. Il a été prouvé que ce système d'équations accompagné des conditions aux limites précédentes possède une solution [11]. Nous en présentons dans la suite une solution dans la limite $\zeta \rightarrow +\infty$, ce qui suffit pour voir émerger un monopôle magnétique.

5.5. Solution loin de l'origine

Dans la limite $\zeta \rightarrow +\infty$, le système (63) devient

$$\begin{cases} \frac{d^2 K}{d\zeta^2} = K \\ \frac{d^2 H}{d\zeta^2} = \frac{2\lambda}{e^2} (H - \zeta) \end{cases} . \quad (64)$$

Les solutions compatibles avec les conditions aux limites sont

$$\begin{cases} K(r) = e^{-m_w r} \\ H(r) = e\mu r \end{cases} . \quad (65)$$

Dans ce régime, les champs tendent rapidement vers leurs valeurs asymptotiques définies en Équation (59). Comme

$$\begin{cases} G_{0i,0}^{(a)} = 0 \\ G_{ij,0}^{(a)} = \frac{2}{er^2} \varepsilon_{ij}^a + \frac{2}{er^2} (\varepsilon_{jk}^a n_i n^k - \varepsilon_{ik}^a n_j n^k) \\ -\frac{1}{er^2} \varepsilon_{ijm} n^a n^m, \end{cases}$$

il est possible de donner une expression aux champs électrique et magnétique définis en Équation (58) :

$$\begin{cases} F^{0i} = -\mathcal{E}^i = 0 \\ F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} \mathcal{B}^k = \frac{1}{\mu} \vec{\phi}_0 \cdot \vec{G}_{ij,0} = \varepsilon_{ijk} \frac{r^k}{er^3} \end{cases} .$$

Ainsi le champ électromagnétique asymptotique est strictement magnétique, et a la forme d'un champ magnétique radial, dérivant d'un monopôle :

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{1}{e} \frac{\vec{r}}{r^3} . \quad (66)$$

La charge de ce monopôle peut être définie par un théorème de Gauss. On obtient un flux magnétique $\phi = -4\pi/e$, soit une charge $g = -1/e$. Elle est donc égale, à un signe près, à deux fois la charge minimale du monopôle de Dirac, définie en Équation (10).

Le monopôle de 't Hooft-Polyakov décrit donc un champ magnétique qui, vu de l'infini, ne peut pas être distingué du champ créé par un monopôle de Dirac de charge $-1/e$. Mais contrairement au monopôle de Dirac, la solution de 't Hooft-Polyakov est régulière dans l'espace entier. La différence principale entre les deux monopôles réside dans leur source. Le monopôle de Dirac dérive de l'ajout arbitraire d'une charge magnétique, alors que celui de 't Hooft-Polyakov est dû à la structure même des champs.

6. MONOPÔLE BPS

Nous avons montré dans la section précédente qu'il existe des monopôles magnétiques pour un système constitué de champs de jauge de Yang-Mills et d'un champ de Higgs. Dans le cas du monopôle de Dirac, la charge est un paramètre ajouté de manière arbitraire. Son énergie est donc un paramètre libre. Le monopôle de 't Hooft-Polyakov émerge d'un mécanisme tout autre : le système ne possède pas de source, le monopôle est une propriété intrinsèque des champs. Ce sont en fait les champs de jauge et de Higgs qui jouent le rôle de sources, comme le montre l'Équation (57). Il est alors possible de calculer l'énergie du monopôle : elle est définie par le système, et non par un choix fait en posant les paramètres.

Nous allons montrer dans la suite qu'il existe une borne inférieure à l'énergie du monopôle, puis nous verrons que cette borne peut être atteinte.

6.1. Borne de Bogomol'nyi

L'existence d'une borne inférieure à l'énergie du monopôle est un résultat dû à Bogomol'nyi [4, 5]. Cette énergie a déjà été définie en Section 5.2 :

$$\begin{aligned} E &= \int \left[\frac{1}{2} \vec{E}_i \cdot \vec{E}_i + \frac{1}{2} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + V(\vec{\phi}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (D_0 \vec{\phi} \cdot D_0 \vec{\phi} + D_i \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi}) \right] d^3 \vec{x} . \end{aligned} \quad (67)$$

On se place ici dans un cas plus général que celui de 't Hooft-Polyakov, où la configuration était statique.

Les termes $D_0 \vec{\phi} \cdot D_0 \vec{\phi}$ et $V(\vec{\phi})$ étant positifs, on peut minorer E par

$$E \geq \frac{1}{2} \int \left[\vec{E}_i \cdot \vec{E}_i + \vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + D_i \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi} \right] d^3 \vec{x} .$$

On a ici conservé les termes qui vont permettre de définir les champs électrique et magnétique à partir de l'Équation (58). Afin de faire apparaître les termes en $\vec{\phi} \cdot \vec{G}_{\mu\nu}$, on introduit un paramètre angulaire θ , et on ajoute et

soustrait $\vec{E}_i \cdot D_i \vec{\phi} \sin(\theta)$ et $\vec{B}_i \cdot D_i \vec{\phi} \cos(\theta)$ à l'intégrande :

$$\begin{aligned} E &\geq \frac{1}{2} \int \left[\left(\vec{E}_i - D_i \vec{\phi} \sin(\theta) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\vec{B}_i - D_i \vec{\phi} \cos(\theta) \right)^2 \right] d^3 \vec{x} \\ &+ \sin(\theta) \int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{E}_i d^3 \vec{x} + \cos(\theta) \int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{B}_i d^3 \vec{x} \\ &\geq \sin(\theta) \int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{E}_i d^3 \vec{x} + \cos(\theta) \int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{B}_i d^3 \vec{x}. \end{aligned}$$

Considérons à présent les deux termes séparément. Remarquons tout d'abord que

$$D_i \vec{\phi} \cdot \vec{B}_i = \partial_i (\vec{\phi} \cdot \vec{B}_i) - \vec{\phi} \cdot D_i \vec{B}_i.$$

L'identité de Bianchi (34) impose $D_i \vec{B}_i = \vec{0}$. Le théorème de Stokes donne alors

$$\int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{B}_i d^3 \vec{x} = \int_{\Sigma_0} \vec{\phi} \cdot \vec{B}_i dS_i,$$

où Σ_0 est la configuration du système aux bords, le vide de Higgs, pour assurer la convergence de l'intégrale. dS_i est la surface normale à x_i . $\vec{\phi} \cdot \vec{B}_i = \mu \mathcal{B}_i$ est alors le champ magnétique, défini en Équation (58), créé par le photon du système. C'est donc lui qui porte le monopôle magnétique. On obtient donc

$$\int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{B}_i d^3 \vec{x} = \mu \int_{\Sigma_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu g,$$

où g est la charge magnétique.

On peut procéder de la même manière pour le terme électrique :

$$D_i \vec{\phi} \cdot \vec{E}_i = \partial_i (\vec{\phi} \cdot \vec{E}_i) - \vec{\phi} \cdot D_i \vec{E}_i.$$

Or $D_i \vec{E}_i = -D_i \vec{G}_{0i} = -e \vec{\phi} \times D_i \vec{\phi}$, avec les équations du mouvement (50). Donc $\vec{\phi} \cdot D_i \vec{E}_i = 0$. On obtient alors

$$\int D_i \vec{\phi} \cdot \vec{E}_i d^3 \vec{x} = \mu \int_{\Sigma_0} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \mu q,$$

où q est la charge électrique. Ainsi pour chaque angle θ , on a une borne inférieure pour l'énergie :

$$E \geq \mu (g \cos(\theta) + q \sin(\theta)).$$

La limite la plus fine est obtenue quand le terme de droite atteint son maximum, i.e. quand $\tan(\theta) = q/g$. On obtient alors la limite de Bogomol'nyi :

$$E \geq \mu \sqrt{g^2 + q^2}. \quad (68)$$

Dans le cas du monopôle de 't Hooft-Polyakov, la charge électrique est nulle et la charge magnétique est $g = -1/e$, donc $g\mu = -m_W/e^2$. Si l'on considère que les bosons d'interaction W^\pm ont une masse de l'ordre de 90 GeV, comme le Z^0 de l'interaction faible, et si l'on assimile e à la charge de l'électron, on obtient $E \geq 10$ TeV. Cette énergie est à la limite des capacités actuelles des accélérateurs de particules, ce qui peut expliquer l'absence de résultats expérimentaux sur les monopôles. Cette limite n'est cependant qu'un ordre de grandeur, étant donnée la simplicité du modèle.

6.2. Atteindre la borne

On peut en fait montrer que la borne de Bogomol'nyi n'est pas seulement une borne inférieure, mais un minimum de l'énergie. Pour cela, il convient de reprendre la démonstration précédente. Plaçons nous dans le cas statique, pour lequel $E_i^{(a)} = 0$ et $D_0 \phi_i = 0$, ce qui revient à choisir $\sin(\theta) = 0$. L'inégalité $\vec{B}_i \cdot \vec{B}_i + D_i \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi} \geq 2 \vec{B}_i \cdot D_i \vec{\phi}$, utilisée précédemment, devient une égalité si \vec{B}_i et $D_i \vec{\phi}$ vérifient l'équation de Bogomol'nyi :

$$\vec{B}_i = D_i \vec{\phi}. \quad (69)$$

Il reste enfin à imposer $V(\vec{\phi}) = 0$ pour que l'inégalité (68) devienne une égalité. Pour assurer qu'une charge magnétique existe, il convient d'imposer la limite de Prasad-Sommerfeld [6] :

$$\lambda \rightarrow 0. \quad (70)$$

En effet, si $\lambda \neq 0$, il faut imposer $\vec{\phi}^2 = \mu^2$ pour minimiser le potentiel. Alors

$$\begin{aligned} \partial_i (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) &= 2 \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} = 0 \\ \text{donc } \vec{\phi} \cdot D_i \vec{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de Bogomol'nyi (69) impose alors $\vec{\phi} \cdot \vec{B}_i = 0$, la solution ne possède donc pas de champ magnétique et possède une charge magnétique nulle.

Avec la limite de Prasad-Sommerfeld, la limite est bien atteinte :

$$E = \mu |g|. \quad (71)$$

Dans une telle configuration, les équations vérifiées par H et K deviennent

$$\begin{cases} \zeta \frac{dK}{d\zeta} = -KH \\ \zeta \frac{dH}{d\zeta} = H + 1 - K^2 \end{cases}. \quad (72)$$

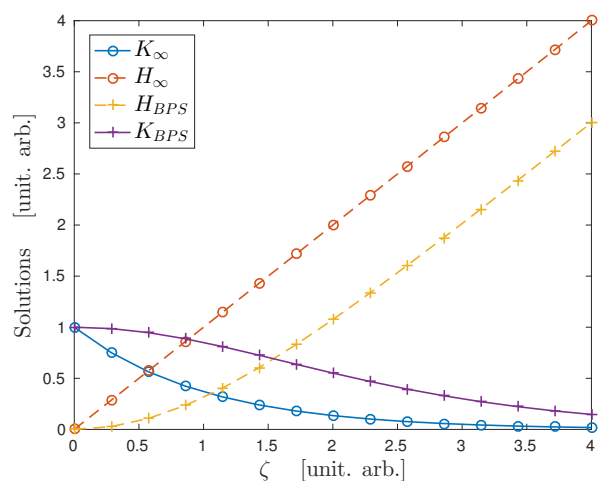


Fig. 3 Comparaison des solutions des équations du mouvement pour le monopôle BPS et dans le cas de la limite loin de l'origine. Les solutions diffèrent seulement au voisinage de l'origine, où H_∞ et K_∞ n'ont pas de sens.

Une solution du système avec les bonnes conditions aux limites est alors

$$\begin{cases} K(\zeta) = \frac{\zeta}{\sinh(\zeta)} \\ H(\zeta) = \zeta \coth(\zeta) - 1 \end{cases} . \quad (73)$$

Le monopôle BPS (Bogomol'nyi Prasad Sommerfeld) est donc une solution exacte. Les fonctions H et K sont tracées en Figure 3.

7. CONCLUSION

La prédiction faite par t'Hooft et Polyakov de l'existence des monopôles magnétiques est très prometteuse. En montrant que ces objets apparaissent naturellement dans les théories de grande unification et en prédisant leur masse, ils tracent la voie vers une éventuelle découverte de particules portant une charge magnétique. Julia et Zee ont également montré que ces théories acceptaient les dyons, des particules portant à la fois une charge électrique et une charge magnétique [12].

Ces particules sont activement recherchées. L'expérience MoEDAL (Monopôle and Exotics Detector at the LHC) recherche par exemple la production directe de monopôles magnétiques et de particules massives chargées stables (ou pseudo-stables) auprès du LHC [13, 14]. Elle utilise pour cela des collisions proton-proton de 8 TeV et a permis un encadrement de la masse du monopôle : $100 \text{ GeV} < m < 3500 \text{ GeV}$. Ceci laisse encore une large plage d'énergie où chercher les monopôles, mais confirme l'ordre de grandeur obtenu par Bogomol'nyi.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Henning Samtleben et François Delduc pour leur relecture attentive. Merci tout particulièrement à Sylvain Lacroix pour ses nombreux conseils avisés.

RÉFÉRENCES

- [1] P. A. M. DIRAC. “Quantised Singularities in the Electromagnetic Field”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 133.821 (1931), p. 60–72. ISSN : 09501207.
- [2] G.'t HOOFT. “Magnetic monopoles in unified gauge theories”. In : *Nuclear Physics B* 79.2 (1974), p. 276–284. ISSN : 0550-3213.
- [3] Alexander M. POLYAKOV. “Particle Spectrum in the Quantum Field Theory”. In : *JETP Lett.* 20 (1974). [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*20,430(1974)], p. 194–195.
- [4] E. B. BOGOMOLNY. “Stability of Classical Solutions”. In : *Sov. J. Nucl. Phys.* 24 (1976). [*Yad. Fiz.*24,861(1976)], p. 449.
- [5] S. COLEMAN et al. “Can one dent a dyon?” In : *Physical Review D* 15 (jan. 1977), p. 544–545.
- [6] M. K. PRASAD et Charles M. SOMMERFIELD. “Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon”. In : *Phys. Rev. Lett.* 35 (12 sept. 1975), p. 760–762.
- [7] C. N. YANG et R. L. MILLS. “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance”. In : *Phys. Rev.* 96 (1 oct. 1954), p. 191–195.
- [8] F. ENGLERT et R. BROUT. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 13 (9 août 1964), p. 321–323.
- [9] Peter W. HIGGS. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. In : *Phys. Rev. Lett.* 13 (16 oct. 1964), p. 508–509.
- [10] Howard GEORGI et S. L. GLASHOW. “Unity of All Elementary-Particle Forces”. In : *Phys. Rev. Lett.* 32 (8 fév. 1974), p. 438–441.
- [11] A. JAFFE et C. TAUBES. *Vortices and monopoles*. Sous la dir. de BIRKHÄUSER. 1980.
- [12] B. JULIA et A. ZEE. “Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory”. In : *Phys. Rev. D* 11 (8 avr. 1975), p. 2227–2232.
- [13] Vasiliki A. MITSOU. “MoEDAL : Seeking magnetic monopoles and more at the LHC”. In : *PoS EPS-HEP2015* (2015), p. 109. arXiv : [1511.01745](https://arxiv.org/abs/1511.01745) [[physics.ins-det](https://arxiv.org/archive/physics)].
- [14] B. ACHARYA et al. “Search for magnetic monopoles with the MoEDAL prototype trapping detector in 8 TeV proton-proton collisions at the LHC”. In : (2016). arXiv : [1604.06645](https://arxiv.org/abs/1604.06645) [[hep-ex](https://arxiv.org/archive/hep)].
- [15] Valery RUBAKOV. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press, 2002. ISBN : 9781400825097.
- [16] José Miguel FIGUEROA-O'FARRILL. “Electromagnetic duality for children”. <http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf>. 1998.
- [17] Bernard de WIT, Jack SMITH et Eric LAENEN. “Field theory in particle physics”. À paraître.
- [18] Lewis H. RYDER. *Quantum field theory*. 2^e éd. Cambridge University Press, 1996. ISBN : 0-521-48914-6.
- [19] Kerson HUANG. *Quarks, Leptons and Gauge Fields*. World Scientific, 1982. ISBN : 9971-950-03-0.

□ CAMILLE ELOY
M2 Sciences de la Matière
Parcours FEADÉP Physique
ENS de Lyon - Université Lyon 1
camille.eloy@ens-lyon.fr